第 64 卷　第 2 期　　中山大学学报（自然科学版中英文）　　Vol. 64　No. 2
2025 年　3 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Mar.　2025

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. ZR20240126

具有阻尼和无穷时滞的随机弹性系统解的指数稳定性*

张小云，范虹霞

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州 730070

摘　要：研究在Hilbert空间中具有阻尼和无穷时滞的随机弹性系统mild解的存在唯一性和指数稳定性，利用算子半群理论、公理化相空间的性质及随机分析，获得了所研究问题mild解的存在唯一性和均方指数稳定性，丰富和发展了阻尼弹性系统已有的结果.

关键词：随机弹性系统；mild解；指数稳定性；阻尼；算子半群

中图分类号：O175.15　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（2025）02－0170－09

Exponential stability of solutions for stochastic elastic system with damping and infinite delay

ZHANG Xiaoyun，*FAN Hongxia*

Collage of Mathematics and Physics，*Lanzhou Jiaotong University*，*Lanzhou 730070*，*China*

Abstract：The existence，uniqueness and exponential stability of mild solutions of stochastic elastic systems with damping and infinite delay are studied in Hilbert spaces. By using the theory of operator semigroups，properties of axiomatic phase space and stochastic analysis，the existence and uniqueness of mild solution and the exponential stability in mean square are obtained，the existing results of damping elastic systems are enriched and developed.

Key words：stochastic elastic systems；mild solutions；exponential stability；damping；operator semigroups

振动是物体或某种状态随时间作往复变化的现象，包括机械振动与非机械振动.例如，钟摆的来回摆动，桥梁由于车辆通过引起的振动，轨枕由于火车行驶引起的振动，以及水坝、阀门的振动等，这一类振动属于机械振动.另一类振动属于非机械运动的振动现象，例如，声波、光波、电磁波等.

机械振动所研究的对象是机械或结构，在理论分析中要将实际的机械或结构抽象为力学模型，即形成一个力学系统.可以产生机械振动的力学系统，称为振动系统，简称系统.实际的振动系统，都具有连续分布的质量与弹性，因此，称之为弹性系统.由于确定弹性体上无数质点的位置需要无限多个坐标，因此弹性体是具有无限多自由度的系统，它的振动规律要用时间和空间坐标的函数来描述，其运动方程是偏微分方程.

Chen et al.（1982）的开创性工作研究了具有阻尼的线性弹性系统

* **收稿日期：**2024－04－21　　**录用日期：**2024－09－22　　**网络首发日期：**2025－01－03

基金项目：国家自然科学基金（11561040）

作者简介：张小云（1998年生），女；**研究方向：**非线性发展方程；E-mail：zhangxy3231@163.com

通信作者：范虹霞（1978年生），女；**研究方向：**非线性发展方程；E-mail：ffls0217@126.com

全文阅读

ZR20240126

$$\ddot{\omega}(t)+B\dot{\omega}(t)+A\omega(t)=0,\ t\geqslant 0. \tag{1}$$

在Hilbert空间H中，Chen et al.(1982)考虑阻尼算子B与弹性算子A的平方根算子$A^{\frac{1}{2}}$有关，并猜想若定义域$D(B)\supset D(A^{\frac{1}{2}})$，并且下列条件之一成立：

$$\beta_1(A^{\frac{1}{2}}x,x)\leqslant(Bx,x)\leqslant\beta_2(A^{\frac{1}{2}}x,x),\ \ x\in D(A^{\frac{1}{2}});$$
$$\beta_1(Ax,x)\leqslant(B^2x,x)\leqslant\beta_2(Ax,x),\ \ x\in D(A).$$

则相应于该阻尼弹性系统的解半群是解析的，并且关于这两个猜想他们获得了一些特殊结果，关于这两个猜想的完整证明由Huang(1985,1986)在他的重要工作中给出.

近年来，国内外诸多学者对具有阻尼的弹性系统的解半群的正则性、指数稳定性及弹性系统的谱性质在Hilbert空间中进行了卓有成效的研究，得到了一系列重要、深刻的结果，参见文献(Diagana，2017；Luong et al.，2020；Wei et al.，2022；Gou et al.，2023，2024)及其中的参考文献.

目前关于具有阻尼的振动方程在Banach空间中的主要结果有：Massatt(1983)研究了抽象强阻尼波方程解半群的解析性以及非线性强阻尼波方程弱解的存在性、唯一性及渐近稳定性.李永祥(1997)研究了如下线性强阻尼波方程

$$u_{tt}+aAu_t+Au=0,\ \ t>0$$

的解析性与指数稳定性.该方程的指数稳定性曾被Massatt不加证明地引用，然而李永祥(1997)通过一个反例说明该方程不一定指数稳定，并且给出了指数稳定的充分条件.

Fan et al.(2014b)精细刻画了相应于如下具有结构阻尼的线性弹性系统

$$\ddot{\omega}(t)+\rho A\dot{\omega}(t)+A^2\omega(t)=0,\ \ t>0$$

的C_0-半群是指数稳定的解析半群的充分条件，Fan et al.(2014c)获得了非线性阻尼弹性系统的上下解单调迭代方法. Fan et al.(2014a)描述了具有结构阻尼的线性弹性系统适度解的长时间行为，并且在全局Lipschitz条件下证明了非线性弹性系统整体解的指数衰减性.

在实际的应用中，研究的模型受到白噪声或周围环境的影响而产生一些变化，这些随机因素会影响模型的运行结果.基于以上讨论，研究具有无穷时滞的随机阻尼弹性系统是非常有必要的，然而，据作者所知，在现有的文献中研究具有无穷时滞的随机阻尼弹性系统mild解的存在唯一性和指数稳定性的结论很少，故本文将研究如下具有阻尼和无穷时滞的随机弹性系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}[u'(t)+\rho Bu(t)]=[-Au(t)+f(t,u_t)]\mathrm{d}t+g(t,u_t)\mathrm{d}W(t), & t>0,\\ u(t)=\varphi(t),\ u'(0)=u_1,\ t\in(-\infty,0],\end{cases} \tag{2}$$

mild解的存在唯一性和均方指数稳定性，其中$\rho>0$是常数，A：$D(A)\subset X\to X$且B：$D(B)\subset X\to X$是Hilbert空间X上的稠定闭线性算子，$\mathcal{B}$是公理化定义的相空间，$\varphi(0)\in D(A)$，$\varphi\in\mathcal{B}$，$u_1\in X$.时滞u_t由$u_t:(-\infty,0]\to X, u_t(s)=u(t+s)$，$s\leqslant 0$定义，$f:[0,+\infty)\times X\to X$和$g:[0,+\infty)\times X\to X$为连续函数，$W(t)$是$Q$-Wiener过程.

1　预备知识

本节将介绍一些符号并回顾必要的基本概念及引理.

设X,Y是两个实可分的Hilbert空间，$L(Y,X)$为所有从Y到X的有界线性算子构成的空间，X,Y，$L(Y,X)$的范数均用$\|\cdot\|$表示.$(\Omega,F,\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$为一完备的赋流概率空间，流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$满足通常条件，即流是右连续递增且$\mathcal{F}_0$包含所有的$p$零集.设$\{e_k\}_{k\geqslant 1}$是一组完备的标准正交基，$\{w(t)|t\geqslant 0\}$是定义在$(\Omega,F,\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$上的$Y$-值Wiener过程，有迹类算子$Q>0$，记$\mathrm{Tr}(Q)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\lambda<+\infty$，满足$Qe_k=\lambda_ke_k$，$k\in N$.$\{w_k(t)\}_{k\geqslant 1}$是完备赋流概率空间$(\Omega,F,\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$上与一维标准Wiener过程无关的一个序列，使得

$$w(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,w_k(t)e_k.$$

则称上述Y–值随机过程$w(t)$为Q-Wiener过程.设$\xi\in L(Y,X)$且定义

$$\|\xi\|_{L_2^0}^2 = \mathrm{Tr}(\xi Q \xi^*) < +\infty.$$

则称ξ为Q-Hilbert-Schmidt算子，且$L_2^0(Y,X)$表示从Y到X的所有Q-Hilbert-Schmidt算子ξ：$Y \to X$构成的空间.

引理1（Chen et al.，2018） 对任意的$L_2^0(Y,X)$-值可测过程$\psi(\cdot)$及任意的$\tilde{r} \geqslant 1$，以下不等式成立

$$\sup_{s\in[0,t]} E\left\|\int_0^s \psi(\vartheta)\mathrm{d}W(\vartheta)\right\|_X^{2\tilde{r}} \leqslant N_{\tilde{r}}\left(\int_0^t \left(E\|\psi(s)\|_{L_2^0}^{2\tilde{r}}\right)^{1/\tilde{r}}\mathrm{d}s\right)^{\tilde{r}}, \quad t\in[0,+\infty),$$

其中$N_{\tilde{r}} = (\tilde{r}(2\tilde{r}-1))^{\tilde{r}}$.

本文将运用由Hale et al.（1978）定义的公理化相空间B，更多关于公理化相空间的性质可参考文献（Hale et al.，1993），相空间$B((-\infty,0],X)$表示所有从$(-\infty,0]$到X的$\mathcal{F}_0$-可测函数构成的空间，赋有半范数$\|\cdot\|_B$，关于B的公理化如下：

（A1） 若$v:(-\infty,\sigma+T]\to X(T>0)$是$[\sigma,\sigma+T]$上的连续函数且$v_\sigma\in B$，则对每个$t\in[\sigma,\sigma+T]$，下列条件成立：

（i） $v_t \in B$；

（ii） $\|v(t)\| \leqslant H\|v_t\|_B$；

（iii） 对每个$t \geqslant \sigma$，$\|v_t\|_B \leqslant K(t-\sigma)\sup\left\{\|v(s)\| \,\middle|\, \sigma \leqslant s \leqslant t\right\} + M(t-\sigma)\|v_\sigma\|_B$，

其中$H>0$是常数，$K:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$连续，$M:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$局部有界，且$H,K,M$与$v(\cdot)$无关.

（A2） 条件(A1)中的函数$v(\cdot)$，v_t是$[\sigma,\sigma+T]$上的B-值连续函数.

（A3） 相空间$B=B((-\infty,0],X)$是完备的.

注1 由条件(A1)中的(iii)可知

（i） $\|v_t\|_B \leqslant K^*\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\|v(s)\| + M^*\|v_0\|_B$，其中$K^* = \sup\limits_{t\in R}K(t)$，$M^* = \sup\limits_{t\in R}M(t)$.

（ii） 本文假设存在常数$\mu>0$，使得$M(t)=\mathrm{e}^{-\mu t}$，则

$$\|v_t\|_B \leqslant K^*\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|v(s)\| + \mathrm{e}^{-\mu t}\|v_0\|_B.$$

为了研究系统(2)的适定性，首先考虑如下线性确定系统

$$\begin{cases} u''(t) + \rho B u'(t) + Au(t) = h(t), \quad t>0, \\ u(0) = u_0 \in D(A),\ u'(0) = u_1 \in X. \end{cases}$$

对二阶方程

$$u''(t) + \rho B u'(t) + Au(t) = h(t), \quad t>0, \tag{3}$$

作如下分解

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + E_1(\rho)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + E_2(\rho)\right)u = h(t),\ t>0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(E_1(\rho)+E_2(\rho)\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + E_1(\rho)E_2(\rho)u = h(t). \tag{4}$$

结合式(3)和式(4)可以得到

$$E_1(\rho)+E_2(\rho) = \rho B, \qquad E_1(\rho)E_2(\rho) = A. \tag{5}$$

由式(5)及韦达定理

（a） 若$C(\rho) = \rho^2B^2 - 4A = L^2(\rho) = 0$，则

$$E_1(\rho) = E_2(\rho) = \frac{\rho B}{2}.$$

（b） 若$C(\rho) = \rho^2B^2 - 4A = L^2(\rho) > 0$，则

$$E_1(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho B - L(\rho)\right), \qquad E_2(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho B + L(\rho)\right). \tag{6}$$

（c） 若$C(\rho) = \rho^2B^2 - 4A = -L^2(\rho) < 0$，则

$$E_1(\rho)=\frac{1}{2}\big(\rho B-\mathrm{i}L(\rho)\big),\quad E_2(\rho)=\frac{1}{2}\big(\rho B+\mathrm{i}L(\rho)\big),\tag{7}$$

其中i为虚数单位.

接下来，定义与算子A和B相关的线性算子

$$C(\rho)\coloneqq\rho^2B^2-4A=L^2(\rho),D(C(\rho))=D(B^2)\cap D(A).$$

对于稠定闭线性算子$L(\rho)$：$D(L(\rho))\subset X\to X$，$C(\rho)$有以下3种情形：$C(\rho)=0$，$C(\rho)=L^2(\rho)>0$及$C(\rho)=-L^2(\rho)<0$，Fan et al.（2014a）已讨论了$C(\rho)=0\,(\rho^2B^2-4A=0)$的情形，故本文只考虑$C(\rho)=L^2(\rho)>0$和$C(\rho)=-L^2(\rho)<0$两种情形.

情形1： $C(\rho)=L^2(\rho)$.

假设存在稠定闭线性算子$L(\rho)$：$D(L(\rho))\subset X\to X$，使得$u(0)\in D(L(\rho))\cap D(B)$，且满足

（H_1）$C(\rho)=\rho^2B^2-4A=L^2(\rho)$,

（H_2）B与$L(\rho)$可交换，即$BL(\rho)=L(\rho)B$.

设$u'(t)+E_2(\rho)u(t)=z(t)$，则

$$z(0)=u_1+E_2(\rho)u_0\coloneqq z_0.$$

因此可将系统(2)转化为如下两个柯西问题：

$$\begin{cases}z'(t)+E_1(\rho)z(t)=h(t),\ t>0,\\ z(0)=z_0,\end{cases}\tag{8}$$

和

$$\begin{cases}u'(t)+E_2(\rho)u(t)=z(t),\quad t>0,\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{9}$$

显然，问题(8)~(9)分别为关于$-E_1(\rho)$和$-E_2(\rho)$的线性非齐次初值问题，由算子半群理论（Pazy，1983），$-E_1(\rho)$和$-E_2(\rho)$生成X上的C_0-半群，记$-E_1(\rho)$和$-E_2(\rho)$生成的C_0-半群分别为$\{S_1(t)\}_{t\geqslant0}$和$\{S_2(t)\}_{t\geqslant0}$，因此初值问题(8)~(9)是适定的.

众所周知，若$h\in L^1([0,+\infty),X)$，则初值问题(8)的mild解为

$$z(t)=S_1(t)z_0+\int_0^tS_1(t-s)h(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant0.\tag{10}$$

类似地，若$z\in C([0,+\infty),X)$，则初值问题(9)的mild解可表示为

$$u(t)=S_2(t)u_0+\int_0^tS_2(t-s)z(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant0.\tag{11}$$

结合式(10)~(11)，即可得

$$u(t)=S_2(t)u_0+\int_0^tS_2(t-s)S_1(t)z_0\,\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^sS_2(t-s)S_1(s-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\ t\geqslant0.$$

由上述讨论，给出系统(2) mild解的定义如下：

定义1　若定义在$(-\infty,T](T>0)$上的$\mathcal{F}_t$适定随机过程$u(t)$满足下列条件：

(i)　$u(\cdot)$有滞后路径，$\int_0^T\|u(t)\|^2\mathrm{d}t<+\infty$几乎确定；

(ii)　$u(t)=\varphi(t),\quad t\leqslant0$；

(iii)　对任意的$t\in(0,T],u(t)$满足积分方程

$$u(t)=S_2(t)\varphi(0)+\int_0^tS_2(t-s)S_1(s)z_0\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^sS_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_0^sS_2(t-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s),$$

且$u_0=\varphi\in B$，则称其为系统(2)的mild解. 其中$\{S_1(t)\}_{t\geqslant0}$和$\{S_2(t)\}_{t\geqslant0}$分别为$-E_1(\rho)$和$-E_2(\rho)$在X上生成的C_0-半群，$E_1(\rho)$和$E_2(\rho)$由式(6)给定.

情形2： $C(\rho)=-L^2(\rho)$.

假设存在稠定的闭线性算子$L(\rho)$：$D(L(\rho))\subset X\to X$，使得$u(0)\in D(L(\rho))\cap D(B)$，且满足

（B_1） $C(\rho)=\rho^2B^2-4A=-L^2(\rho)$,

（B_2） B 与 $L(\rho)$ 可交换，即 $BL(\rho)=L(\rho)B$.

类似地，可以得到如下定义：

定义 2 若定义在 $(-\infty,T](T>0)$ 上的 $\mathcal{F}_t$ 适定随机过程 $u(t)$ 满足下列条件：

（i） $u(\cdot)$ 有滞后路径，$\int_0^T\|u(t)\|^2\mathrm{d}t<+\infty$ 几乎确定；

（ii） $u(t)=\varphi(t),\quad t\leqslant 0$；

（iii） 对任意的 $t\in(0,T]$，$u(t)$ 满足积分方程：

$$u(t)=T_2(t)\varphi(0)+\int_0^t T_2(t-s)T_1(s)z_0\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^s T_2(t-s)T_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_0^s T_2(t-s)T_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s),$$

且 $u_0=\varphi\in B$，则称其为系统(2)的mild解. 其中 $\{T_1(t)\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{T_2(t)\}_{t\geqslant 0}$ 分别为 $-E_1(\rho)$ 和 $-E_2(\rho)$ 在 X 上生成的 C_0-半群，$E_1(\rho)$ 和 $E_2(\rho)$ 由式(7)给定.

设 $S_\varphi((-\infty,T],X)$ 表示所有 $\mathcal{F}_t$ 适定随机过程 $u=\{u(t)|-\infty<t\leqslant T\}$ 构成的空间，使得 $u(t)=\varphi(t)$, $t\in(-\infty,0]$，且存在某个常数 $a>0$ 和 $N^*=N^*(\varphi,a)>0$，使得

$$E\|u(t)\|^2\leqslant N^*\mathrm{e}^{-at},\quad t\geqslant 0.$$

定义

$$\|u\|_{S_\varphi}^2=\sup_{t\geqslant 0}E\|u(t)\|^2,\quad u\in S_\varphi,$$

则 S_φ 按 $\|u\|_{S_\varphi}$ 构成一个Banach空间.

2 解的均方指数稳定性

本节将考虑系统(2) mild解的存在性和均方指数稳定性，为了得到本文的主要结果，需做出以下假设：

（H_3） 对任意的 φ_1，$\varphi_2\in B$，$t\geqslant 0$，函数 $f(t,\cdot)$ 在 B 上满足Lipschitz条件，即存在常数 $L>0$ 使得

$$\|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)\|\leqslant L\|\varphi_1-\varphi_2\|_B.$$

（H_4） 对任意的 φ_1，$\varphi_2\in B$，$t\geqslant 0$，函数 $g(t,\cdot)$ 在 B 上满足Lipschitz条件，即存在常数 $L_g>0$ 使得

$$\|g(t,\varphi_1)-g(t,\varphi_2)\|\leqslant L_g\|\varphi_1-\varphi_2\|_B.$$

（H_5） C_0-半群 $\{S_1(t)\}_{t\geqslant 0}$，$\{S_2(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X 上指数稳定，即存在正常数 M_1，$M_2>0$，$\lambda_1>\lambda_2>0$，使得

$$\|S_1(t)\|\leqslant M_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},\qquad \|S_2(t)\|\leqslant M_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t},\quad t\geqslant 0.$$

进一步假设，对任意的 $t\geqslant 0$, $f(t,0)\equiv 0$, $g(t,0)\equiv 0$. 为了方便起见，记

$$K_1=M_2^2E\|\varphi(0)\|^2,\quad K_2=M_1^2M_2^2(\lambda_2-\lambda_1)^{-2}E\|z_0\|^2,\quad K_3=2L^2M_1^2M_2^2(\lambda_1\lambda_2)^{-2}\left((K^*)^2N^*+E\|\varphi\|_B^2\right),$$
$$K_4=2N_{\bar{r}}L_g^2M_1^2M_2^2(\lambda_1)^{-2}(2\lambda_2)^{-1}\left((K^*)^2N^*+E\|\varphi\|_B^2\right),\quad K=4(K_1+K_2+K_3+K_4).$$

定理 1 若假设条件(H_1)~(H_5)成立，且

$$2\left[L^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1\lambda_2)^{-2}+N_{\bar{r}}L_g^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1)^{-2}(2\lambda_2)^{-1}\right]<1.$$

则系统(2)存在唯一的mild解 $u(t)$，且 $u(t)$ 是均方指数稳定的，即存在正常数 $a>0$，使得

$$E\|u(t)\|^2\leqslant K\mathrm{e}^{-at},\quad t\geqslant 0.$$

证明 在 S_φ 上定义映射 F：

$$F(u)(t)=\begin{cases}\varphi(t),\quad t\in(-\infty,0],\\ S_2(t)\varphi(0)+\int_0^t S_2(t-s)S_1(s)z_0\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ \qquad +\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s),\quad t\in(0,+\infty).\end{cases}\qquad(12)$$

显然，$u(t)$为系统(2)的mild解当且仅当$u(t)$为算子F的不动点.下证算子F存在不动点.

第1步：证明$F(S_\varphi)\subset S_\varphi$.设$u\in S_\varphi$，则

$$E\left\|F(u)(t)\right\|^2\leqslant 4E\left\|S_2(t)\varphi(0)\right\|^2+4E\left\|\int_0^t S_2(t-s)S_1(s)z_0\mathrm{d}s\right\|^2+4E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right\|^2$$
$$+4E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s)\right\|^2:=4(I_1+I_2+I_3+I_4). \tag{13}$$

不失一般性，假设$0<a<\lambda_2$，下面估计不等式(13)右边的项.

由假设条件(H_5)可知

$$I_1=E\left\|S_2(t)\varphi(0)\right\|^2\leqslant M_2^2\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}E\left\|\varphi(0)\right\|^2\leqslant K_1\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}. \tag{14}$$

$$I_2=E\left\|\int_0^t S_2(t-s)S_1(s)z_0\mathrm{d}s\right\|^2\leqslant M_1^2M_2^2\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}\left(\int_0^t\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)s}E\left\|z_0\right\|\mathrm{d}s\right)^2\leqslant M_1^2M_2^2(\lambda_2-\lambda_1)^{-2}E\left\|z_0\right\|^2\mathrm{e}^{-2\lambda_1 t}\leqslant K_2\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}. \tag{15}$$

由假设条件(H_3)、(H_5)及注1可得

$$\begin{aligned}I_3&=E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right\|^2\leqslant L^2M_1^2M_2^2\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda_2(t-s)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau\right\|_B\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2\\&\leqslant L^2M_1^2M_2^2\left(K^*\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)\right\|+\mathrm{e}^{-at}E\left\|u_0\right\|_B\right)^2\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda_2(t-s)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2\\&\leqslant 2L^2M_1^2M_2^2(\lambda_1\lambda_2)^{-2}\left((K^*)^2\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)\right\|^2+\mathrm{e}^{-2at}E\left\|u_0\right\|_B^2\right)\\&\leqslant 2L^2M_1^2M_2^2(\lambda_1\lambda_2)^{-2}\left[(K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right]\mathrm{e}^{-at}\leqslant K_3\mathrm{e}^{-at}.\end{aligned} \tag{16}$$

由注1可得

$$E\|u_t\|_B^2\leqslant 2\left[(K^*)^2\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E\left\|u(s)\right\|^2+\mathrm{e}^{-2\mu t}E\left\|u_0\right\|_B^2\right]. \tag{17}$$

由引理1可得

$$I_4=E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s)\right\|^2\leqslant N_{\bar{r}}\int_0^t E\left\|\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^2\mathrm{d}s.$$

根据假设条件(H_4)~(H_5)、式(17)及Hölder不等式得

$$\begin{aligned}E\left\|\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^2&\leqslant M_1^2M_2^2\mathrm{e}^{2(\lambda_2-\lambda_1)s-2\lambda_2 t}\left(\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|g(\tau,u_\tau)\right\|\mathrm{d}\tau\right)^2\\&\leqslant L_g^2M_1^2M_2^2\mathrm{e}^{2(\lambda_2-\lambda_1)s-2\lambda_2 t}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau\right\|_B^2\mathrm{d}\tau\\&\leqslant 2L_g^2M_1^2M_2^2(\lambda_1)^{-2}\mathrm{e}^{2\lambda_2(s-t)}\left[(K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right]\mathrm{e}^{-at}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I_4&=2N_{\bar{r}}L_g^2M_1^2M_2^2(\lambda_1)^{-2}\left[(K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right]\mathrm{e}^{-(2\lambda_2+a)t}\int_0^t\mathrm{e}^{2\lambda_2 s}\mathrm{d}s\\&\leqslant 2N_{\bar{r}}L_g^2M_1^2M_2^2(\lambda_1)^{-2}(2\lambda_2)^{-1}\left[(K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right]\mathrm{e}^{-at}\leqslant K_4\mathrm{e}^{-at}.\end{aligned} \tag{18}$$

由不等式(13)~(16)及式(18)可得

$$E\left\|F(u)(t)\right\|^2\leqslant K\mathrm{e}^{-at},\quad t\geqslant 0.$$

第2步：证明$F(u)(t)$是S_φ上的滞后过程.设$u\in S_\varphi$，$t>0$且$\varepsilon>0$充分小，则

$$E\left\|F(u)(t+\varepsilon)-F(u)(t)\right\|^2\leqslant 4\sum_{i=1}^4 E\left\|J_i(t+\varepsilon)-J_i(t)\right\|^2.$$

由于

$$E\left\|J_1(t+\varepsilon)-J_1(t)\right\|^2=E\left\|[S_2(t+\varepsilon)-S_2(t)]\varphi(0)\right\|^2.$$

显然，由C_0-半群$\{S_2(t)\}_{t\geqslant 0}$的强连续性可得，当$\varepsilon\to 0$时，$E\left\|J_1(t+\varepsilon)-J_1(t)\right\|^2\to 0$.

$$E\left\|J_2(t+\varepsilon)-J_2(t)\right\|^2$$

$$\leqslant 2E\left\|\int_0^t [S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s)z_0\mathrm{d}s\right\|^2+2E\left\|\int_t^{t+\varepsilon}S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s)z_0\mathrm{d}s\right\|^2$$

$$\leqslant 2\Big(E\left\|[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s)z_0\right\|\mathrm{d}s\Big)^2+2\left(\int_t^{t+\varepsilon}E\left\|S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s)z_0\right\|\mathrm{d}s\right)^2\coloneqq 2(J_{21}+J_{22}).$$

由假设条件(H_5)可得

$$E\left\|[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s)z_0\right\|\leqslant 2M_1M_2E\left\|z_0\right\|,\qquad E\left\|S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s)z_0\right\|\leqslant M_1M_2E\left\|z_0\right\|.$$

运用Lebesgue’s控制收敛定理及C_0-半群$\{S_2(t)\}_{t\geqslant 0}$的强连续性可得，当$\varepsilon\to 0$时，$J_{21}\to 0$. 显然，当$\varepsilon\to 0$时，$J_{22}\to 0$. 因此，当$\varepsilon\to 0$时，$E\left\|J_2(t+\varepsilon)-J_2(t)\right\|^2\to 0$.

$$\begin{aligned}E\left\|J_3(t+\varepsilon)-J_3(t)\right\|^2&\leqslant 2E\left\|\int_0^t\int_0^s[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right\|^2\\&\quad+2E\left\|\int_t^{t+\varepsilon}\int_0^s S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right\|^2\\&\leqslant 2\left(\int_0^t\int_0^s E\left\|[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\right\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2\\&\quad+2\left(\int_t^{t+\varepsilon}\int_0^s E\left\|S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\right\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2\coloneqq 2(J_{31}+J_{32}).\end{aligned}\tag{19}$$

由假设条件(H3)、(H5)、式(19)及注1可得

$$\begin{aligned}&\int_0^s E\left\|[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\right\|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant 2LM_1M_2\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau\right\|_B\mathrm{d}\tau\leqslant 2LM_1M_2(\lambda_1)^{-1}\left[K^*\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)\right\|+M^*E\left\|\varphi\right\|_B\right].\end{aligned}\tag{20}$$

同理可得

$$\int_0^s E\left\|S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s-\tau)f(\tau,u_\tau)\right\|\mathrm{d}\tau\leqslant LM_1M_2(\lambda_1)^{-1}\left[K^*\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)\right\|+M^*E\left\|\varphi\right\|_B\right].\tag{21}$$

因此，由式(19)~(21)，Lebesgue’s控制收敛定理及C_0-半群$\{S_2(t)\}_{t\geqslant 0}$的强连续性可得，当$\varepsilon\to 0$时，$J_{31}\to 0$. 显然，当$\varepsilon\to 0$时，$J_{32}\to 0$. 因此

$$E\left\|J_3(t+\varepsilon)-J_3(t)\right\|^2\to 0,\varepsilon\to 0.$$

由引理1可得

$$\begin{aligned}E\left\|J_4(t+\varepsilon)-J_4(t)\right\|^2&\leqslant 2E\left\|\int_0^t\int_0^s[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\&\quad+2E\left\|\int_t^{t+\varepsilon}\int_0^s S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\&\leqslant 2N_{\bar r}\int_0^t E\left\|\int_0^s[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^2\mathrm{d}s\\&\quad+2N_{\bar r}\int_t^{t+\varepsilon}E\left\|\int_0^s S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^2\mathrm{d}s\coloneqq 2(J_{41}+J_{42}).\end{aligned}\tag{22}$$

由式(22)，假设条件(H_4)~(H_5)及注1可知

$$\begin{aligned}&E\left\|\int_0^s[S_2(t+\varepsilon-s)-S_2(t-s)]S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^2\\&\leqslant 4L_g^2M_2^2M_1^2\mathrm{e}^{-2\lambda_1 s}\left(\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau\right\|_B\mathrm{d}\tau\right)^2\leqslant 8L_g^2M_1^2M_2^2(\lambda_1)^{-2}\left[(K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right].\end{aligned}\tag{23}$$

同理可得

$$E\left\|\int_0^s S_2(t+\varepsilon-s)S_1(s-\tau)g(\tau,u_\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^2$$

$$\leqslant L_g^2M_1^2M_2^2\mathrm{e}^{-2\lambda_1 s}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}\,\mathrm{d}\tau\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau\right\|_B^2\mathrm{d}\tau\leqslant 2L_g^2M_1^2M_2^2(\lambda_1)^{-2}\left[(K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right].\tag{24}$$

由式(22)~(24)，Lebesgue’s控制收敛定理及C_0-半群$\{S_2(t)\}_{t\geqslant 0}$的强连续性可得，当$\varepsilon\to 0$时，$J_{41}\to 0$. 显然，当$\varepsilon\to 0$时，$J_{42}\to 0$. 因此

$$E\left\|J_4(t+\varepsilon)-J_4(t)\right\|^2\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

上述估计验证了$t\to F(u)(t)$是滞后过程.

第3步：证明F：$S_\varphi\to S_\varphi$是压缩映射. 对任意的u，$v\in S_\varphi$，由式(12)

$$E\left\|Fu(t)-Fv(t)\right\|^2\leqslant 2E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)[f(\tau,u_\tau)-f(\tau,v_\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right\|^2$$

$$+2E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)[g(\tau,u_\tau)-g(\tau,v_\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}W(s)\right\|^2\coloneqq 2(N_1+N_2).\tag{25}$$

由假设条件(H_3)、(H_5)及注1可得

$$\begin{aligned}N_1&=E\left\|\int_0^t\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)[f(\tau,u_\tau)-f(\tau,v_\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right\|^2\\&\leqslant L^2M_1^2M_2^2\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda_2(t-s)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau-v_\tau\right\|_B\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2\\&\leqslant L^2M_1^2M_2^2(K^*)^2\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda_2(t-s)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2\\&\leqslant L^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1\lambda_2)^{-2}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2.\end{aligned}\tag{26}$$

由假设条件(H_4)~(H_5)及注1可得

$$N_2\leqslant N_{\bar r}\int_0^t E\left\|\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)[g(\tau,u_\tau)-g(\tau,v_\tau)]\mathrm{d}\tau\right\|^2\mathrm{d}s.\tag{27}$$

又因为

$$\begin{aligned}&E\left\|\int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)[g(\tau,u_\tau)-g(\tau,v_\tau)]\mathrm{d}\tau\right\|^2\\&\leqslant L_g^2M_1^2M_2^2\mathrm{e}^{2(\lambda_2-\lambda_1)s-2\lambda_2 t}\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}\,\mathrm{d}\tau\int_0^s\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}E\left\|u_\tau-v_\tau\right\|_B^2\mathrm{d}\tau\\&\leqslant L_g^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1)^{-2}\mathrm{e}^{2\lambda_2(s-t)}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2.\end{aligned}\tag{28}$$

将式(28)代入式(27)得

$$\begin{aligned}N_2&\leqslant N_{\bar r}L_g^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1)^{-2}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}\left(\int_0^t\mathrm{e}^{2\lambda_2 s}\mathrm{d}s\right)\\&\leqslant N_{\bar r}L_g^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1)^{-2}(2\lambda_2)^{-1}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2.\end{aligned}\tag{29}$$

由式(25)~(26)及式(29)可得

$$E\left\|Fu(t)-Fv(t)\right\|^2\leqslant 2\left[L^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1\lambda_2)^{-2}+N_{\bar r}L_g^2M_1^2M_2^2(K^*)^2(\lambda_1)^{-2}(2\lambda_2)^{-1}\right]\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}E\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2.$$

由定理1的条件可知F是压缩映射，因此系统(2)存在唯一的均方指数稳定的mild解.

(B_3) C_0-半群$\{T_1(t)\}_{t\geqslant 0}$，$\{T_2(t)\}_{t\geqslant 0}$在$X$上指数稳定，即存在正常数$C_1$，$C_2>0$，$\alpha_1>\alpha_2>0$，使得

$$\left\|T_1(t)\right\|\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\qquad\left\|T_2(t)\right\|\leqslant C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\ t\geqslant 0.$$

为了方便起见，记

$$\bar K_1=C_2^2E\left\|\varphi(0)\right\|^2,\qquad\bar K_2=C_1^2C_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^{-2}E\left\|z_0\right\|^2,\qquad\bar K_3=2L^2C_1^2C_2^2(\alpha_1\alpha_2)^{-2}\left((K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right),$$

$$\bar K_4=2N_{\bar r}L_g^2C_1^2C_2^2(\alpha_1)^{-2}(2\alpha_2)^{-1}\left((K^*)^2N^*+E\left\|\varphi\right\|_B^2\right),\qquad\bar K=4\left(\bar K_1+\bar K_2+\bar K_3+\bar K_4\right).$$

类似地，对于$C(\rho)=-L^2(\rho)<0$的情形，有如下定理：

定理 2 若假设条件(B_1)~(B_3)、(H_3)~(H_4)成立，且

$$2\left[L^2C_1^2C_2^2(K^*)^2(\alpha_1\alpha_2)^{-2}+N_{\bar{r}}L_g^2C_1^2C_2^2(K^*)^2(\alpha_1)^{-2}(2\alpha_2)^{-1}\right]<1.$$

则系统(2)存在唯一的mild解$u(t)$，且$u(t)$是均方指数稳定的. 即存在正常数$a>0$，使得

$$E\left\|u(t)\right\|^2\leqslant\bar{K}e^{-at},\quad t\geqslant 0.$$

注 2 定理2的证明与定理1的证明类似，因此，文中省略对定理2的证明.

参考文献：

李永祥，1997. 关于抽象强阻尼波方程的指数稳定性[J]. 数学年刊A辑，18(3)：299-306.

CHEN G，RUSSELL D L，1982. A mathematical model for linear elastic systems with structural damping[J]. Quart Appl Math，39(4)：433-454.

CHEN G，van GAANS O，LUNEL S V，2018. Existence and exponential stability of a class of impulsive neutral stochastic partial differential equations with delays and Poisson jumps[J]. Stat Probab Lett，141：7-18.

DIAGANA T，2017. Well-posedness for some damped elastic systems in Banach spaces[J]. Appl Math Lett，71：74-80.

FAN H X，GAO F，2014a. Asymptotic stability of solutions to elastic systems with structural damping[J]. Electron J Differ Equ，245:1-9.

FAN H X，LI Y X，2014b. Analyticity and exponential stability of semigroups for the elastic systems with structural damping in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl，410(1)：316-322.

FAN H X，LI Y X，2014c. Monotone iterative technique for the elastic systems with structural damping in Banach spaces[J]. Comput Math Appl，68(3)：384-391.

GOU H D，MA W，2023. A study on decay mild solutions for damped elastic systems in Banach spaces[J]. Monasth Für Math，202(3)：515-539.

GOU H D，YANG H，2024. Monotone iterative technique for delay elastic systems in ordered Banach space[J]. Appl Anal，103(13)：2390-2409.

HUANG F L，1985. On the holomorphic property of the semigroup associated with linear elastic systems with structural damping [J]. Acta Math Sci，5(3)：271-277.

HUANG F L，1986. A problem for linear elastic systems with structural damping [J]. Acta Math Sci，6：107-113.

HALE J K，KATO J，1978. Phase space for retarded equations with infinite delay[J]. Funkc Ekvacioj-Ser I，21(1)：11-41.

HALE J K，LUNEL S M V，1993. Introduction to functional differential equations[M]. New York：Springer.

LUONG V T，TUNG N T，2020. Exponential decay for elastic systems with structural damping and infinite delay[J]. Appl Anal，99(1)：13-28.

MASSATT P，1983. Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations[J]. J Differ Equ，48(3)：334-349.

PAZY A，1983. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York：Springer.

WEI M，LI Y X，LI Q，2022. Positive mild solutions for damped elastic systems with delay and nonlocal conditions in ordered Banach space[J]. Qual Theory Dyn Syst，21(4)：128.

（责任编辑 冯兆永）